

# Big-bang numérique

*Jean-Paul Delahaye*

Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille

e-mail : delahaye@lifl.fr

*Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille,*

CNRS UMR 8022, Bât M3

59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

Parmi les exemples élémentaires de mécanismes formels engendrant de la complexité, celui de la suite "regarde-et-dis-le" ("look-and-say" sequence) est tout particulièrement fascinant.

- On commence avec le nombre 1 et on lit ce qu'on voit. On voit «un "1"» ce qu'on écrit 11, c'est le deuxième élément de la suite ;
- La lecture de 11 donne «deux "1"», ce qu'on écrit 21 ;
- La lecture de 21 donne «un "2", un "1"», ce qu'on écrit 1211 ;
- La lecture de 1211 donne « un "1", un "2", deux "1"», ce qu'on écrit 111221, etc.

```

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211
31131211131221
13211311123113112211
11131221133112132113212221
3113112221232112111312211312113211
1321132132111213122112311311222113111221131221
11131221131211131231121113112221121321132132211331222113112211

```

Cette suite a été décrite pour la première fois par M. Hilgemeier dans un article où il en démontrait quelques propriétés élémentaires. Cependant, c'est le mathématicien John Conway qui a mené l'étude détaillée de cette suite et en a élucidé la structure. Ce qu'il a trouvé est étrange et complexe.

Conway propose d'utiliser le langage de la chimie et de la cosmologie. Il imagine un monde qui, seconde après seconde, n'est que le développement des commentaires numériques successifs du texte «1» : une sorte de Big-bang numérique. Cette vision parménidienne du monde comme *devenir de l'Un*, aurait sans doute séduit les philosophes grecques.

Parler de Big-bang n'est pas abusif car J. Conway a établi que le taux d'augmentation moyen de cet univers est 1,30357726903... D'un terme à l'autre, la taille de l'univers est multipliée par ce nombre qui est la solution d'une équation de degré 71 que Conway aidé de Oliver Atkin a calculée explicitement. Ceci veut dire que la lecture d'une suite de chiffres augmente sa taille de 30,35 % en moyenne à chaque étape (ce résultat en réalité est vrai quel que soit le point de départ, sauf pour «2 2» qui bien sûr reste constant). Dans cette *cosmologie arithmétique*, nous savons donc —contrairement à la cosmologie du monde physique où cette question reste ouverte— que l'expansion ne cessera jamais.

Mais l'analogie proposée par Conway avec le monde réel est plus profonde encore. L'univers, engendré par les commentaires numériques sur l'UN, se décompose en *éléments stables* ou *instables* et il y a 92 éléments stables que Conway a baptisés du nom des 92 premiers éléments de la classification périodique des éléments chimiques de Mendeleïev (voir le tableau A).

## Tableau A

### Les éléments dans l'univers du big-bang numérique

01 H	22
02 He	13112221133211322112211213322112
03 Li	312211322212221121123222112
04 Be	111312211312113221133211322 112211213322112
05 B	1321132122211322212221121123222112
06 C	3113112211322112211213322112
07 N	111312212221121123222112
08 O	132112211213322112
09 F	31121123222112
10 Ne	111213322112
11 Na	123222112
12 Mg	3113322112
13 Al	1113222112
14 Si	1322112
15 P	311311222112
16 S	1113122112
17 Cl	132112
18 Ar	3112
19 K	1112
20 Ca	12
21 Sc	3113112221133112
22 Ti	11131221131112
23 V	13211312
24 Cr	31132
25 Mn	111311222112
26 Fe	13122112
27 Co	32112

juin 2, 2006

J.-P. Delahaye

28 Ni 11133112  
29 Cu 131112  
30 Zn 312  
31 Ga 13221133122211332  
32 Ge 31131122211311122113222  
33 As 11131221131211322113322112  
34 Se 13211321222113222112  
35 Br 3113112211322112  
36 Kr 11131221222112  
37 Rb 1321122112  
38 Sr 3112112  
39 Y 1112133  
40 Zr 12322211331222113112211  
41 Nb 1113122113322113111221131221  
42 Mo 13211322211312113211  
43 Tc 311322113212221  
44 Ru 132211331222113112211  
45 Rh 311311222113111221131221  
46 Pd 111312211312113211  
47 Ag 132113212221  
48 Cd 3113112211  
49 In 11131221  
50 Sn 13211  
51 Sb 3112221  
52 Te 1322113312211  
53 I 311311222113111221  
54 Xe 11131221131211  
55 Cs 13211321  
56 Ba 311311  
57 La 11131  
58 Ce 1321133112  
59 Pr 31131112  
60 Nd 111312  
61 Pm 132  
62 Sm 311332  
63 Eu 1113222  
64 Gd 13221133112  
65 Tb 3113112221131112  
66 Dy 111312211312  
67 Ho 1321132  
68 Er 311311222  
69 Tm 11131221133112  
70 Yb 1321131112  
71 Lu 311312  
72 Hf 11132  
73 Ta 13112221133211322112211213322113  
74 W 312211322212221121123222113  
75 Re 111312211312113221133211322112211  
213322113  
76 Os 1321132122211322212221121123222113  
77 Ir 3113112211322112211213322113  
78 Pt 111312212221121123222113  
79 Au 132112211213322113  
80 Hg 31121123222113  
81 Tl 111213322113  
82 Pb 123222113  
83 Bi 3113322113  
84 Po 1113222113  
85 At 1322113  
86 Rn 311311222113  
87 Fr 1113122113  
88 Ra 132113  
89 Ac 3113  
90 Th 1113  
91 Pa 13  
92 U 3

Les transformations des éléments numériques les uns en les autres, correspondent, sans être parfaitement identiques, aux transmutations spontanées des éléments physiques les uns en les autres. Voir le tableau B.

## Tableau B

H → H  
 He → Hf Pa H Ca Li  
 Li → He  
 Be → Ge Ca Li  
 B → Be  
 C → B  
 N → C  
 O → N  
 F → O  
 Ne → F  
 Na → Ne  
 Mg → Pm Na  
 Al → Mg  
 Si → Al  
 P → Ho Si  
 S → P  
 Cl → S  
 Ar → Cl  
 K → Ar  
 Ca → K  
 Sc → Ho Pa H Ca Co  
 Ti → Sc  
 V → Ti  
 Cr → V  
 Mn → Cr Si  
 Fe → Mn  
 Co → Fe  
 Ni → Zn Co  
 Cu → Ni  
 Zn → Cu  
 Ga → Eu Ca Ac H Ca Zn  
 Ge → Ho Ga  
 As → Ge Na  
 Se → As  
 Br → Se  
 Kr → Br  
 Rb → Kr  
 Sr → Rb  
 Y → Sr U  
 Zr → Y H Ca Tc  
 Nb → Er Zr  
 Mo → Nb  
 Tc → Mo  
 Ru → Eu Ca Tc  
 Rh → Ho Ru  
 Pd → Rh  
 Ag → Pd  
 Cd → Ag  
 In → Cd  
 Sn → In  
 Sb → Pm Sn

Te → Eu Ca Sb  
 I → Ho Te  
 Xe → I  
 Cs → Xe  
 Ba → Cs  
 La → Ba  
 Ce → La H Ca Co  
 Pr → Ce  
 Nd → Pr  
 Pm → Nd  
 Sm → Pm Ca Zn  
 Eu → Sm  
 Gd → Eu Ca Co  
 Tb → Ho Gd  
 Dy → Tb  
 Ho → Dy  
 Er → Ho Pm  
 Tm → Er Ca Co  
 Yb → Tm  
 Lu → Yb  
 Hf → Lu  
 Ta → Hf Pa H Ca W  
 W → Ta  
 Re → Ge Ca W  
 Os → Re  
 Ir → Os  
 Pt → Ir  
 Au → Pt  
 Hg → Au  
 Tl → Hg  
 Pb → Tl  
 Bi → Pm Pb  
 Po → Bi  
 At → Po  
 Rn → Ho At  
 Fr → Rn  
 Ra → Fr  
 Ac → Ra  
 Th → Ac  
 Pa → Th  
 U → Pa

Pour bien comprendre ce que sont ces éléments stables du Big-bang numérique, définissons d'abord ce qu'est un *élément*. Certains nombres  $N$  peuvent être séparés en deux morceaux  $N=G.D$  qui dans la suite des commentaires numériques n'interféreront plus jamais entre eux. Plus précisément on dira que  $G.D$  est une *décomposition* du nombre  $N$  si pour tout entier  $n$  le  $n$ -ème commentaire de  $N$  est obtenu en juxtaposant le  $n$ -ème commentaire de  $G$  et le  $n$ -ème commentaire de  $D$ .

Le nombre  $N=1113213211$  se décompose par exemple en  $G=11132$  et  $D=13211$ . En effet, les commentaires successifs de 11132 se termineront tous par 2 (réfléchissez une seconde...), alors qu'aucun commentaire de 13211 ne commencera par 2 (car  $13211 \rightarrow 11131221 \rightarrow 3113112211 \rightarrow 132113212221$  dont le début est 13211, et donc les premières décimales

recommencent de manière cyclique). Les nombres qui ne peuvent pas être décomposés sont appelés les *éléments* ou *atomes*.

Conway a montré que parmi tous les éléments, il n'y en a que 92 qui restent présents dans l'univers au cours de son évolution. Le *Théorème chimique* est même plus précis : *à partir d'un certain moment, l'univers n'est composé que des 92 éléments (les éléments stables) et à chaque instant (pour chaque nombre engendré à partir du 1), les 92 éléments stables sont présents dans l'univers.*

L'évolution de l'univers à partir d'un certain moment n'est donc que la transformation des éléments stables les uns en les autres selon des règles précises et immuables. Une sorte de bouillonnement, complexe mais parfaitement réglé, détermine l'avenir du Big Bang numérique.

La démonstration de ce premier résultat consiste simplement en la vérification des tableaux et en quelques raisonnements arithmétiques. Elle ouvre cependant la porte, cette fois en utilisant des méthodes d'algèbre matricielle (triangulation de matrice, calculs de valeurs propres et de vecteurs propres), à la démonstration d'un second résultat. Conway l'appelle le *Théorème arithmétique* et il précise les propriétés statistiques de l'évolution des commentaires sur l'UN : *la taille de l'univers augmente exponentiellement à la vitesse  $V=1,30357726903\dots$  et l'abondance des différents éléments tend vers certaines valeurs fixées non nulles.*

Pour un million d'atomes, il y a par exemple en moyenne 91790 atomes d'hydrogène, 27 d'arsenic, 102 d'uranium, 3237 d'Hélium.

L'exemple de cette suite est plus ludique que sérieux et le parallèle entre mathématiques et physique ne doit être considéré que comme un curieux hasard. Cependant, il s'agit ici d'un exemple remarquable montrant comment d'une idée simplissime naît une structure mathématique complexe, qui, dans ce cas, grâce au génie de Conway a été totalement élucidée, alors que dans bien d'autres situations rien de tel n'est possible.

Les axiomes d'une théorie — par exemple ceux de l'arithmétique, ou ceux de la théorie des ensembles —, qu'on peut utiliser mécaniquement pour produire tous les théorèmes de la théorie les uns après les autres, sont un autre exemple de procédé simple produisant dans une sorte d'explosion symbolique colossale tout un univers complexe que rien ne laissait entrevoir dans la définition initiale. De cela il faut retenir la leçon : la complexité apparente du monde que nous observons n'exclut pas une origine simple, voire très simple.

## Bibliographie.

juin 2, 2006

J.-P. Delahaye

J. Conway. *The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay*. Dans "Open Problems in Communication and Computation" (T. Cover Ed.) Springer-Verlag, 1987, pp.173-188.

Jean-Paul Delahaye. Jeux mathématiques et mathématiques des jeux. Belin/Pour la science. 1998 (le chapitre 4 donne d'autres détails sur la suite "look-and-say").